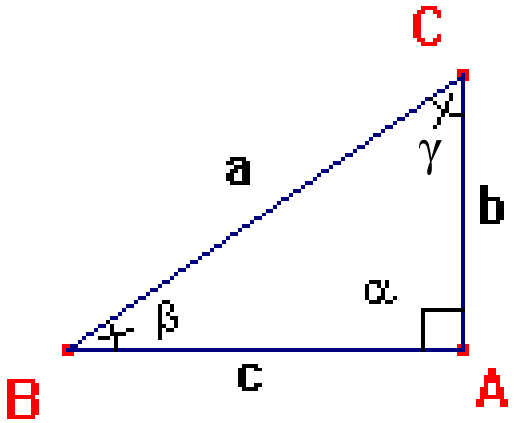
I TRIANGOLI RETTANGOLI



Notazioni standard:
a è il lato che ha come angolo opposto α (quindi se a è l'ipotenusa, α è retto)
b è il lato che ha come angolo opposto β
c è il lato che ha come angolo opposto γ

1° Teorema.

In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'ipotenusa per il *seno* dell'angolo opposto (al cateto), oppure per il *coseno* dell'angolo adiacente (al cateto).

In formule

$$b = a \cdot \sin\beta \qquad c = a \cdot \sin\gamma$$
$$b = a \cdot \cos\gamma \qquad c = a \cdot \cos\beta$$

In modo equivalente (formule inverse)

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \qquad \sin\gamma = \frac{c}{a}$$
$$\cos\gamma = \frac{b}{a} \qquad \cos\beta = \frac{c}{a}$$

2° Teorema.

In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale a quella dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto (al primo cateto), o per la cotangente dell'angolo adiacente (al primo cateto).

In formule

$$b = c \cdot \tan\beta \qquad c = b \cdot \tan\gamma$$
$$b = c \cdot \cot\gamma \qquad c = b \cdot \cot\beta$$

In modo equivalente (formule inverse)

$$\tan\beta = \frac{b}{c} \qquad \tan\gamma = \frac{c}{b}$$
$$\cot\gamma = \frac{b}{c} \qquad \cot\beta = \frac{c}{b}$$

In generale, riferendosi alla figura sottostante (è indicato un solo angolo acuto, chiamato θ (theta)

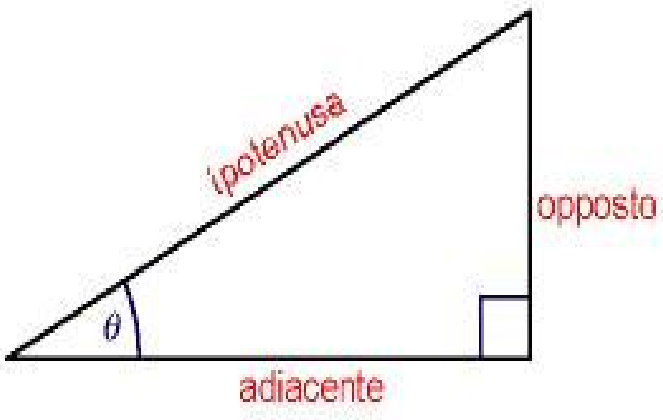
si ha:

$$\sin\theta = \frac{cateto\ opposto}{ipotenusa}$$

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adiacente}{ipotenusa}$$

$$\tan\theta = \frac{cateto\ opposto}{cateto\ adiacente}$$

$$\cot\theta = \frac{cateto\ adiacente}{cateto\ opposto}$$



Teorema di Pitagora

In un triangolo rettangolo, la misura del quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati delle misure dei cateti.

In formule
(a è l'ipotenusa e b, c i due cateti)

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

RISOLUZIONE DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO

cioè determinazione di tutti gli elementi di un triangolo rettangolo, noti due elementi (oltre all'angolo retto) di cui almeno uno sia un lato.

Caso 1: conosco i due cateti b e c.
Allora trovo l'ipotenusa a con il teorema di Pitagora e poi trovo $\sin\beta$ e $\sin\gamma$ usando le relazioni: $\sin\beta = \frac{b}{a}$ e $\sin\gamma = \frac{c}{a}$ (potevo usare anche le altre relazioni e trovare il coseno o la tangente degli angoli β, γ.)
Con il tasto $\sin^{-1}$ della calcolatrice trovo poi i valori di β, γ ed ho finito (in realtà mi basta trovare in quel modo un angolo acuto e basta: l'altro lo trovo per differenza da 90°, dato che gli angoli acuti sono complementari).

Strada alternativa: potevo usare la relazione $\tan\beta = \frac{b}{c}$ e $\tan\gamma = \frac{c}{b}$ per trovare la tangente di β, γ e quindi col tasto $\tan^{-1}$ trovare i valori β, γ (in realtà mi basta trovare in quel modo un angolo acuto basta: l'altro lo trovo per differenza da 90°, dato che gli angoli acuti sono complementari).
Per trovare l'ipotenusa posso utilizzare il teorema di Pitagora (oppure le altre formule inverse delle relazioni che esprimono il 1° teorema, cioè $a = \frac{b}{\sin\beta}$ oppure $a = \frac{c}{\sin\gamma}$).

Caso 2: **conosco l'ipotenusa** e **un cateto**, ad esempio b.

Posso subito trovare l'altro cateto c col teorema di Pitagora; poi dalle relazioni $\sin\beta = \frac{b}{a}$ e $\sin\gamma = \frac{c}{a}$ sono in grado di trovare $\sin\beta$ e $\sin\gamma$ e usando il tasto $\sin^{-1}$ della calcolatrice trovo poi i valori di β, γ ed ho finito (in realtà mi basta trovare in quel modo un angolo acuto basta: l'altro lo trovo per differenza da 90°, dato che gli angoli acuti sono complementari).

Strada alternativa: una volta trovato l'altro cateto c, potevo usare la relazione $\tan\beta = \frac{b}{c}$ e $\tan\gamma = \frac{c}{b}$ per trovare la tangente di β, γ e quindi col tasto $\tan^{-1}$ trovare i valori β, γ (in realtà mi basta trovare in quel modo un angolo acuto basta: l'altro lo trovo per differenza da 90°, dato che gli angoli acuti sono complementari).

Caso 3: **conosco un cateto**, ad esempio b, e **un angolo acuto**, ad esempio β.

Posso subito trovare l'altro angolo acuto facendo $\gamma = 90° - \beta$ e dalle relazioni che danno un cateto in funzione dell'altro trovo c, cioè $c = b \cdot \tan\gamma$; adesso che ho i due cateti trovo l'ipotenusa col teorema di Pitagora (oppure potevo trovare fin dall'inizio l'ipotenusa anche con le altre formule inverse delle relazioni che esprimono il 1° teorema, cioè $a = \frac{b}{\sin\beta}$)..

Caso 4: **conosco l'ipotenusa** e **un angolo acuto**, ad esempio β.

Posso subito trovare l'altro angolo acuto facendo $\gamma = 90° - \beta$ e dalle relazioni che danno un cateto in funzione dell'ipotenusa trovo b, c, cioè $b = a \cdot \sin\beta$ e poi $c = a \cdot \sin\gamma$)..